NOTATIONS

$\mathbb{R}$ étant le corps des réels, les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont notés $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. $\mathbb{R}^n$ est muni de sa distance euclidienne d et on appellera boule de centre O, de rayon r strictement positif, le sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$D = \{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ d(0, x) < r \}$$

$C^\infty(D)$ désigne l'ensemble des fonctions définies et continues sur D, à valeurs réelles, qui admettent des dérivées partielles de tous les ordres, continues sur D.

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M}[m, n]$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels, ayant m lignes et n colonnes. On pose $\mathbf{M}[n] = \mathbf{M}[n, n]$. Si $M \in \mathbf{M}[m, n]$ s'écrit $M = [m_{ij}]$, m_{ij} est l'élément de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne. Si $M \in \mathbf{M}[m, n]$, on note ${}^tM$ la transposée de M donc ${}^tM \in \mathbf{M}[n, m]$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note $[x]$ l'élément de $\mathbf{M}[n, 1]$ tel que $x_{i1} = x_i$ pour tout $i \leqslant n$.

Une application T de D dans $\mathbf{M}[n]$ notée $T(x) = [t_{ij}(x)]$ est dite C^∞ si, pour tout $i \leqslant n$, tout $j \leqslant n$, l'application t_{ij} appartient à $C^\infty(D)$.

Soit f appartenant à $C^\infty(D)$. On définit l'élément H de $\mathbf{M}[n]$ par

$$H = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right].$$

On suppose que :

i. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ pour tout $i \leqslant n$;

ii. H est inversible.

On note q le nombre de valeurs propres réelles positives de H et on pose

$$S(f) = \{ x \in D \ : \ f(x) = f(0) \}$$
$$O^+(f) = \{ x \in D \ : \ f(x) > f(0) \}$$
$$O^-(f) = \{ x \in D \ : \ f(x) < f(0) \}$$

PREMIÈRE PARTIE

1° Pour $n = 2$, donner des exemples de fonctions f telles que :

a. $q = 0$;

b. $q = 1$;

c. $q = 2$.

2° Soit v une fonction C^∞ à valeurs réelles, définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant [0, 1]. Montrer que :

$$v(1) = v(0) + v'(0) + \int_0^1 (1 - t) v''(t) dt.$$

3° Soit G l'application de D dans $\mathbf{M}[n]$ définie par :

$$G(x) = [g_{ij}(x)] \quad \text{où} \quad g_{ij}(x) = \int_0^1 (1 - t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) \, dt.$$

Montrer que :

a. Pour tout $x \in D$, $G(x)$ est symétrique;

b. $G(0) = \dfrac{1}{2} H$;

c. Pour tout $x \in D$, on a :

$$f(x) = f(0) + {}^t[x] \, G(x) \, [x].$$

4° Soit p un polynôme à une variable et à coefficients réels. Soit l appartenant à $C^\infty(D)$ et h définie sur D par :

$$h(x) = \int_0^1 p(t) \, l(tx) \, dt.$$

Montrer que :

a. h est définie et continue sur D;

b. h est continûment différentiable sur D.

[On rappelle, pour cette question, que toute fonction continue sur D est bornée sur toute boule D' de centre O, de rayon $r' < r$.]

5° Montrer que l'application G est C^∞.

6° On note D_q la matrice :

$$D_q = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_{n-q} \end{bmatrix}$$

où I_q est la matrice identité d'ordre q.

Montrer qu'il existe une matrice B inversible, et telle que :

$$H = 2 \, {}^tB \, D_q \, B.$$

7° Montrer qu'il existe une application C^∞ de D dans $\mathbf{M}[n]$ notée $x \longrightarrow M(x)$ telle que :

a. $M(0) = D_q$;

b. Pour tout $x \in D$, $M(x)$ est symétrique;

c. Pour tout $x \in D$:

$$f(x) = f(0) + {}^t[x]\,{}^t B\, M(x)\, B\,[x].$$

Deuxième partie

On suppose $n = 2$.

1° *a.* Montrer qu'il existe une boule D′ de centre O contenue dans D et une application C^∞ de D′ dans $\mathbf{M}[n]$ notée $x \longrightarrow C(x)$ telle que, pour tout $x \in D'$:

i. $C(x)$ est inversible;

ii. $f(x) = f(0) + {}^t[y] \cdot D_q\,[y]$ avec $[y] = C(x) \cdot [x]$;

b. Déterminer le nombre q et l'application C de la question *a.* lorsque :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^3 \quad \text{et} \quad D = \mathbb{R}^2$$

2° Montrer qu'il existe une boule de centre O dans laquelle $df(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ (où df est la différentielle de f).

3° Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant O.

Soit une application $\varphi : I \to D'$ de classe C^∞ telle que $\varphi(0) = 0$. Soit $m(t) = f \circ \varphi(t)$. Montrer qu'il existe une fonction continue $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varepsilon(0) = 0$ et pour tout $t \in I$,

$$m(t) = f(0) + \frac{1}{2}\,{}^t[\varphi'(0)]\, H\, [\varphi'(0)]\, t^2 + \varepsilon(t)\, t^2.$$

4°

a. Si $q = 0$ ou $q = 2$, quels sont les ensembles $S(f)$, $O^+(f)$ et $O^-(f)$?

b. Si $q = 1$, montrer qu'il existe une boule de centre O dans laquelle $S(f)$ est la réunion des images de deux arcs de courbes notés $t \longrightarrow \varphi(t)$ et $t \longrightarrow \psi(t)$ tels que $\{\varphi'(0), \psi'(0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Placer les ensembles $O^+(f)$ et $O^-(f)$ par rapport à ces arcs de courbes et aux vecteurs propres de H.

c. Pour $D = \mathbb{R}^2$ et $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^3$, trouver et dessiner les éléments intervenant dans la question *b*.

Troisième partie

On suppose $n = 2$ et $f(0) = 0$.

Soit Σ la surface paramétrée définie par :

$$\Sigma = \{\, M' \in \mathbb{R}^3 \;:\; M' = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)),\ (x_1, x_2) \in D \,\}$$

Si $M' \in \Sigma$, on note $\Pi(M')$ le plan tangent à Σ en M'. Soit un réel c et $\Omega = (0, 0, c)$. Pour $x = (x_1, x_2) \in D$, on pose :

$$u(x) = x_1^2 + x_2^2 + [c - f(x_1, x_2)]^2$$

1° Interpréter géométriquement u.

2° Montrer que u ne peut être maximum ou minimum qu'en un point $x = (x_1, x_2)$ de D tel que, si $M' = (x_1, x_2, f[x_1, x_2])$, $\overrightarrow{\Omega M'}$ est orthogonal à $\Pi(M')$.

3° Soit $H'(c) = 2(I_2 - cH)$

a. Montrer que le déterminant de $H'(c)$, noté dét $H'(c)$, s'annule pour deux valeurs réelles c_1 et c_2 éventuellement confondues que l'on comparera aux valeurs propres de H.

b. Comparer les valeurs propres de $H'(c)$ et de H.

4° Si dét $H > 0$ et $c \neq c_1$ et $c = c_2$, décrire dans une boule convenable de centre O, $S(u)$, $O^+(u)$ et $O^-(u)$ si :

a. Les valeurs propres de H sont positives;

b. Les valeurs propres de H sont négatives.

5° Résoudre la même question que 4° lorsque dét $H < 0$ et $c \neq c_1$ et $c \neq c_2$.

6° On rappelle que d désigne la distance euclidienne de $\mathbb{R}^3$ et on prend ici $D = \mathbb{R}^2$. Déterminer, pour quelles valeurs de c, on a :

$$d(\Omega, 0) = \inf \{\, d(\Omega, M'),\ M' \in \Sigma \,\}$$

a. Lorsque $f(x) = \alpha(x_1^2 + x_2^2)$ où $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

b. Lorsque $f(x) = \alpha(x_1^2 - x_2^2)$ où $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

FIN